

Adı Soyadı:

Numarası:

29.11.2021

**MAT 205 DİFERANSİYEL DENKLEMLER I ARA SINAV SORULARI**

1.  $a, b \in \mathbb{R}$  olmak üzere  $ax^2 + a^2y^2 = b$  eğri ailesini genel çözüm kabul eden diferansiyel denklemi bulunuz.
2. Aynı anda **hem homojen** (sıfırcıncı dereceden homojen) **hem tam diferansiyel** denklem olan bir diferansiyel denklem yazınız ve genel çözümünü bulunuz. 1M, 1D
3.  $\frac{dy}{dx} - 4 = y$  denkleminin genel çözümünü bulunuz.
4.  $xy' + 2\sqrt{xy} = y$  denkleminin genel çözümünü bulunuz.
5.  $(x+3)y' + y = 4 - 2x$  denkleminin  $y(-1) = 1$  koşulunu sağlayan çözümünü bulunuz.
6.  $2xyy' + (x-1)y^2 = x^2e^x$  denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**Sadece 4 soru cevaplandırınız.**

Süre 90 dakikadır. Başarılar...

Doç. Dr. Fatma Hıra

Cevaplar

①  $ax^2 + a^2y^2 = b$  iki tarafı sabit olduğu için her iki tarafı da türev alırsak  
 $2ax + 2a^2y \cdot y' = 0 \Rightarrow 2a(x + ay \cdot y') = 0$ ,  $a \neq 0$  için  $x + ay \cdot y' = 0$  olur.

Burada bir kez daha türev alırsak  $1 + ay' \cdot y' + ay \cdot y'' = 0$  olur.

$a = -\frac{x}{yy'}$  olup  $1 + a(y')^2 + yy'' = 0 \Rightarrow 1 - \frac{x}{yy'} (y')^2 + yy'' = 0$   
 $\Rightarrow \underline{yy' - x(y')^2 - xyy'' = 0}$

İstenecek diferansiyel denklemdir.

②  $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$  denkleminde  $M$  ve  $N$  aynı dereceden ise denklemin homojendir,  $M_y = N_x$  ise veya  $\frac{\partial u}{\partial x} = M$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y} = N$  olacak şekilde bir  $u(x,y)$  varsa denklemin tam diferansiyeldir. Buna göre

$u(x,y) = x^2 + y^2$  için  $\Rightarrow du = 2x dx + 2y dy \Rightarrow 2x dx + 2y dy = 0 \Rightarrow \int dx + \int dy = 0 \Rightarrow x + y = C$

$u(x,y) = xy$  için  $du = y dx + x dy \Rightarrow y dx + x dy = 0 \Rightarrow \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dy}{y} = 0 \Rightarrow \ln|x| + \ln|y| = 0 \Rightarrow \ln|xy| = 0 \Rightarrow xy = C$

$u(x,y) = xy^2 + yx^2$  için  $du = (y^2 + 2xy) dx + (2xy + x^2) dy \Rightarrow (y^2 + 2xy) dx + (2xy + x^2) dy = 0 \Rightarrow \int (y^2 + 2xy) dx + \int (2xy + x^2) dy = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}xy^3 + x^2y = C$

⋮

③  $y dx + x dy = 0 \Rightarrow \int d(xy) = \int d(C) \Rightarrow xy = C$  genel çözüm

④  $\frac{dy}{dx} - 4 = y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y + 4 \Rightarrow \frac{dy}{y+4} = dx$  İntegrallerin ayarlanması

$\int \frac{dy}{y+4} = \int dx \Rightarrow \ln|y+4| = x + C$

$y+4 = C \cdot e^x$  ( $C = e^C$ )

emclasyon

④  $xy' + 2\sqrt{xy} = y \Rightarrow y' - \frac{1}{x}y = -\frac{2\sqrt{x}}{x}y^{1/2}$   $n = \frac{1}{2}$  için Bernoulli

denklemdir  $u = y^{1-n} = y^{1-1/2} \Rightarrow \boxed{u = y^{1/2}}$   $\Rightarrow u' = \frac{1}{2}y^{-1/2}y'$  olup lineer denklemdir

indijenerer gözeler.

veya  $y' = \frac{y - 2\sqrt{xy}}{x}$   $f(x,y) = \frac{x - 2\sqrt{xy}}{x} = \frac{x - 2\sqrt{xt}}{x} = f(x,t)$

olup homoj denklemdir.

$y = ux \Rightarrow y' = u'x + u$  olup

$u'x + u = \frac{ux - 2\sqrt{x \cdot ux}}{x} \Rightarrow u'x + u = u - 2\sqrt{u} \Rightarrow \frac{du}{dx} \cdot x = -2\sqrt{u}$

$\int \frac{du}{2\sqrt{u}} = \int \frac{dx}{x}$  DA der  
 $\sqrt{u} = -\ln|x| + \ln C$   
 $\sqrt{\frac{y}{x}} = \ln\left(\frac{C}{x}\right)$   
 $\frac{C}{x} = e^{\sqrt{\frac{y}{x}}}$   
 Genel çözüm

⑤  $(x+3)y' + y = 4-2x \Rightarrow y' + \frac{1}{x+3}y = \frac{4-2x}{x+3}$  lineer denklemdir

$\lambda(x) = e^{\int \frac{1}{x+3} dx} = e^{\ln|x+3|} = x+3$  olmak üzere genel çözüm

$(x+3) \cdot y = \int \frac{4-2x}{x+3} (x+3) dx + C \Rightarrow (x+3)y = 4x - x^2 + C$  bulur.

veya  $y' = \frac{-2x - y + 4}{x+3}$   $(1+3) \cdot 1 = 4(1) - 1^2 + C \Rightarrow C = 7$   $\Rightarrow (x+3)y = 4x - x^2 + 7$  istenen özel çözüm  
 $a_1 = -2, b_1 = -1, c_1 = 4$   $a_2 = 1, b_2 = 0, c_2 = 3$   $a_1b_2 - a_2b_1 = 1 \neq 0$  için

(h.k) bulurarak da gözlemler

veya  $(x+3)dy + (y - 4 + 2x)dx = 0 \Rightarrow M_y = 1 = N_x$  olup tam dif denli deniz

da gözlemler

⑥  $2xyy' + (x-1)y^2 = x^2e^x \Rightarrow y' + \frac{(x-1)}{2x}y = \frac{x^2e^x}{2}y^{-1}$   $n = -1$  için Bernoulli denklemdir.

$u = y^2 \Rightarrow u' = 2yy'$  olup  $xu' + (x-1)u = x^2e^x$   
 $\Rightarrow u' + \frac{x-1}{x}u = x^2e^x$  lineer denklemdir

$\lambda(x) = e^{\int \frac{x-1}{x} dx} = e^{x - \ln|x|} = e^x \cdot \frac{1}{x}$  için genel çözüm

$u \cdot \frac{e^x}{x} = \int x^2e^x \cdot \frac{e^x}{x} dx + C \Rightarrow u \frac{e^x}{x} = \frac{1}{2}e^{2x} + C \Rightarrow u = \frac{x}{2}e^x + Cxe^{-x}$   
 $u = y^2$  oldu  $\Rightarrow y^2 = \frac{x}{2}e^x + Cxe^{-x}$  bulur

veya  $(2xy)dy + (x-1)y^2 - x^2e^x dx = 0$

$M_y = 2y(x-1) \neq N_x = 2y$  TD değildir

$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{x-2}{x} = x$  e bağlı integral alırsanız vardır.